

多数目的最適化を利用したパラメータチューニング

廣 安 知 之[†] 石 田 裕 幸^{††}
三 木 光 範^{†††} 横 内 久 猛[†]

本稿では、多数目的最適化において有効な探索が可能な多目的最適化手法を用い、新たなパラメータチューニング手法を提案した。実世界における事象やシステムを模倣したモデルのパラメータをチューニングする研究では、複数の実験値との誤差間に存在するトレードオフの度合いを把握することができるように、多目的最適化の概念を利用したパレートのアプローチが注目されている。しかし、パラメータチューニングでは考慮すべき誤差が数多く存在するのに対し、一般的な多目的最適化手法は、目的数が多くなれば性能が著しく悪化する。そこで、多数目的最適化においても有効な多目的最適化手法を検討し、その手法を利用してパラメータチューニングを行うことを提案した。意思決定者の選好情報を利用する多目的最適化では、探索する目的関数空間を意思決定者が好む領域周辺に限定することで、多数目的最適化問題に対しても有効な探索を可能にする。テストモデルやディーゼルエンジン燃焼モデルである HIDECS のパラメータをチューニングする数値実験を通して、本手法を用いれば、実験値との誤差が小さく、実験値周辺に多様性のある解集合を得られることを確認できた。

Parameter Tuning Using Evolutionary Many-Objective Optimization

TOMOYUKI HIROYASU,[†] HIROYUKI ISHIDA,^{††} MITSUNORI MIKI^{†††}
and HISATAKE YOKOUCHI[†]

In this paper, we proposed a parameter tuning method using Evolutionary Multi-objective Optimization (EMO) algorithms modified for an efficient search in many-objective problems. In recent studies on the tuning of parameters of models that imitate real world phenomena and systems, Pareto approaches using concepts of EMO have been used because Decision Maker (DM) can understand the degree of trade-off among errors to observation values from two or more sets of parameters obtained by EMO. However, the performance of well-known EMO algorithms such as NSGA-II and SPEA2 is poor with many-objective problems whereas there are many observation values in parameter tuning. Therefore, we applied a method using the preferences of DM to parameter tuning. In EMO using DM's preferences, an efficient search in many-objective problems is achieved by limiting the search area around the region that DM prefers. Through the numerical experiments with simple test models and HIDECS, which is a sophisticated phenomenological spray-combustion model, it was confirmed that the proposed method could obtain sets of parameters with accuracy and diversity in the vicinity of reference points.

1. はじめに

近年、様々な分野において、複雑な事象やシステムがモデル化され、コンピュータを用いたシミュレーションが行われている。本研究では、内部に存在するパラメータを変化させることによって、様々な環境に対応できるようなシミュレーションを対象とする。このよ

うなシミュレーションの利用の1つとして、実験値にシミュレーション結果が一致するようにパラメータを決定し、未知の結果をシミュレーションから獲得することがあげられる。これらのパラメータには、実験に対して一意的に決定できるものと、試行錯誤的もしくは経験的に決定するパラメータが存在する。シミュレーションを実験値に一致させるためには、後者のパラメータを調整することにより、シミュレーション結果と実験値との誤差を最小にする必要がある。例えば、地球の振る舞いを模倣したモデルのパラメータチューニングを例にとると、気温、温度、海温、海水の塩度などの基準が挙げられ、シミュレーション結果がそれらの実験値に近づくようにパラメータをチューニング

[†] 同志社大学生命医科学部
Faculty of Life and Medical Sciences, Doshisha University

^{††} 同志社大学大学院
Graduate School of Engineering, Doshisha University

^{†††} 同志社大学理工学部
Faculty of Knowledge Engineering, Doshisha University

する必要がある¹⁾。このようなパラメータチューニングにおいては、比較すべき実験値の数は1つではなく複数存在する場合がほとんどであり、これらすべての基準を考慮しなければならない。一般的に広く利用されている方法は、複数の基準を基に、重み和などを用いることにより1つの誤差の和を導出し、その誤差の和を最小化する方法^{2),3)}である。しかしながら、複数存在する実験値に対して、意思決定者 (Decision Maker: DM) はある点においては、他の点と比較して特に精度を厳しく要求する場合がある。種々の設計の問題においては、このような場合がよく見られる。しかしながら、場合によっては、これらの複数の実験値の誤差を最小化する場合、ある点の誤差を最小化すると他の誤差が大きくなってしまいうような、いわゆるトレードオフの関係が生じる。DM はパラメータチューニングを行う前には、これらのトレードオフの関係を知らることが困難である。そのため、1つの誤差の和の基準を構築する際に、それぞれについて重みや優先順位を付与する必要が生じ、これらの操作は非常に困難な場合が多い。また、重みの付け方は最終的に得られる解に大きく影響を及ぼすことも知られている。

そのため、誤差の和を最小化するのではなく、複数の各実験値との誤差の1つ1つを目的とすることによって、多目的最適化問題として定式化し、互いに優劣をつけられない解の集合であるパレート最適解集合を導出する方法^{1),4)}によるアプローチがあり、これをパレートのアプローチと呼ぶ。パレートのアプローチによるパラメータチューニングでは、複数の様々なパレート最適解集合の導出が探索の目標の1つになるため、誤差の和を最小化するアプローチの際に問題となる重み付けの問題を回避することができる。更に、同程度の精度を有する様々な解集合の導出が可能のため、それらの解同士を比較することにより、どの点の実験値に対する誤差を少なくすると他のどの点の誤差が大きくなるかなどの傾向を把握することが可能である。これは、設計などの問題におけるDMにとって非常に有益な情報となる。また、パレートのアプローチを採用した際には、1度の試行でこれらの解集合が導出可能な点が特徴である。誤差の和の最小化によるアプローチにおいても、重みを変化させることで、解集合を得ることは可能であるが、複数試行が必要であり、重みの変更を効果的に行わなければ、多様な解集合が得られない場合がある。

これらの理由により、本論文では、実験値にシミュレーション結果が一致するようにパラメータを決定する問題において、パレートのアプローチによる方法を

検討する。しかしながら、既存のパレートのアプローチによるパラメータチューニングでは、考慮すべき実験値は2~3程度の少数であり、数多くの基準を取り扱っておらず、数多くの実験値を取り扱う必要がある。多目的最適化問題において、5個以上の目的関数が存在するような問題は特に“多目的最適化問題”と呼ばれ、目的関数の数が増加すると取り扱う真のパレート最適解が正しく求まらない問題が存在することが知られている⁵⁾。そのため、パレートのアプローチによりパラメータチューニングを行う場合には、多目的最適化問題においても真のパレート解を求められる手法が必要となる。

そこで本論文では、数多くの実験値を考慮するために、多目的最適化においても有効な多目的最適化手法を適用して、パラメータチューニングを行うことを提案する。まず、パレートのアプローチに用いられる多目的最適化の概要や、多目的最適化の問題点について述べる。次に、その問題点を基に、多目的最適化に有効な多目的最適化手法を検討し、数多くの実験値を考慮するパラメータチューニングに適用する。そして、作成したテストモデルを用いて数値実験を行い、導出される解集合の特徴を確認する。最後に、ディーゼルエンジンの燃焼をシミュレートする現象論的モデルの1つであるHIDECS^{6),7)}のパラメータチューニングを行い、その有効性を検証する。

2. 多目的最適化と多数目的最適化

2.1 多目的最適化

パレートのアプローチに用いられる多目的最適化は、複数の目的関数を与えられた制約条件の下で最小化、または最大化する問題として定義されている。これは、 k 個の目的関数、 m 個の不等式制約条件、 n 個の設計変数が存在する場合、以下のように定式化される⁸⁾。

$$\begin{cases} \min(\max) & \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x}))^T \\ \text{subject to} & \mathbf{x} \in X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ & | g_i(\mathbf{x}) \leq 0, (i = 1, \dots, m)\} \end{cases} \quad (1)$$

上式において、 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ は k 個の目的関数を要素とするベクトル、 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ は n 次元の設計変数を表すベクトルである。目的関数 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 、制約条件 $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ は、設計変数 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ により一意に決定される。また、 X は全ての制約条件を満たす領域 (実行可能領域) を表す。一般的に多目的最適化では、互いの目的関数が競合する関係にある。その場合、全ての目的関数が最良値を示す設計変数は存在しない。従って、多目的最適化では、パレート最適解の

概念を導入している。パレート最適解は、解の優越関係により表される。解の優越関係の定義を以下に示す。ただし、説明を簡単にするため、全ての目的を最小化とする。

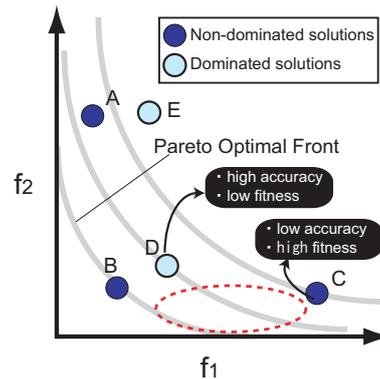
定義 (優越関係): $x^1, x^2 \in R^n$ とする。
 $(\forall i)(f_i(x^1) \leq f_i(x^2)) \quad (\exists i)(f_i(x^1) < f_i(x^2))$
 のとき、 x^1 は x^2 に優越するという。

上式において、 x^1, x^2 は n 次元の設計変数を表す。この優越関係を用いて、パレート最適解は以下のように定義される。

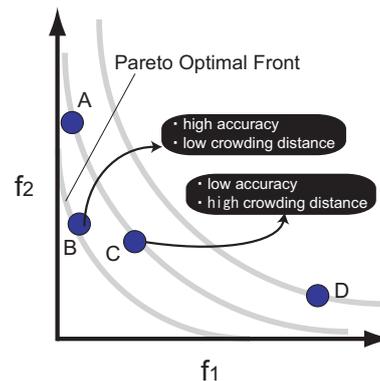
定義 (パレート最適解): $x^0 \in R^n$ とする。
 x^0 に優越する $x \in R^n$ が存在しないとき、 x^0 はパレート最適解である。

一般的にパレート最適解は複数存在するため、1 試行の探索により複数のパレート最適解を導出することが望ましい。従って、多点探索である遺伝的アルゴリズム (Genetic Algorithm: GA)⁹⁾ などの進化的計算は複数のパレート最適解の導出を可能にするため、進化的計算を多目的最適化に適用した Evolutionary Multi-objective Optimization (EMO) の研究が数多く行われている。Elitist Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm (NSGA-II)¹⁰⁾ や Strength Pareto Evolutionary Algorithm (SPEA2)¹¹⁾ は一般的に用いられている EMO であり、パレートのアプローチによるパラメータチューニングの先行研究として、NSGA-II を利用する手法が提案されている¹⁾。

これら EMO には、解集合をパレート最適解に近づけるメカニズム (精度の向上) だけでなく、解集合の多様性向上を加味したメカニズムが組み込まれている。これは、DM の選択肢の増加と対象問題の特徴把握を促すためである。EMO で導出される解は複数であるが、最終的に DM が利用する解は 1 つであるため、DM は EMO で導出された解集合の中から 1 つの解を選ぶ必要がある。この際、多様性のある解集合が導出されれば、DM の選択肢増加に繋がる。また、導出された解同士を比較することにより、DM は各目的間のトレードオフの度合いなど、対象問題や各解の特徴を把握することができる。この際、多様性のある解集合が導出されれば、様々な解同士の比較が可能になるため、これらの特徴を把握し易くなる。このような利点から、パレートのアプローチでは、1 つの指標を導入するアプローチの欠点である重み付けの問題、対象モデルや各パラメータセットの特徴を把握できない



(a) 優越によるランキングが原因となる場合



(b) ニッチング処理が原因となる場合

図 1 精度の悪い解が重要視される例

Fig. 1 An example of disagreement between accuracy and ranking based on domination

問題を解決することができる。

2.2 多数目的最適化の問題点

一般的にパラメータチューニングでは数多くの実験値を考慮するため、パレートのアプローチによるパラメータチューニングは、多目的最適化の中でも、多数目的最適化と捉えることができる。しかし、パレートのアプローチの研究では、全ての基準を目的として扱っていない。その理由は、NSGA-II や SPEA2 などの代表的な EMO を多数目的最適化に適用した場合、探索性能が著しく低下してしまうためである。NSGA-II や SPEA2 を用いた多数目的最適化では、探索を進めているにも関わらず、解集合の精度が悪化する現象が頻繁に起こる^{5),12),13)}。この現象を図 1 を例に説明する。図 1 は 2 目的の最小化問題の概念図である。

図 1(a) の解 C, D を比較した場合、解 D の方がパレート最適フロント (パレート最適解集合により形成される領域) から近くに位置し、精度が高いにも関わらず、探索中では劣解となり、解 C の方が重要視されてしまう。このような精度の順序と重要度の逆転は、

目的関数空間に対して探索解の数が少ない場合に起こり易い。もし探索解の数が多く、図 1(a) の点線で描かれた領域にも解が存在すれば、解 C は劣解となり、精度の順序と重要度は逆転しない。つまり、多数目的最適化のように目的関数空間の広さに比べて探索解の数が少ない場合では、精度の順序と重要度の逆転の頻度が高くなり、精度の高い解が探索中に淘汰され易くなるため、解集合の精度が悪化する。

また、非劣解（ある解集合の中で他の解に優越されない解）同士の比較においても、精度の悪い解が重要視されてしまう現象が起こる。図 1(b) において、A ~ D の 4 つの解の中から 3 つを選択する場合を想定すると、これら 4 つの解は全て非劣解になるため、crowding distance¹⁰⁾ などのニッチング処理（多様性保持のメカニズム）により、選択される解が決定される。具体的には、目的関数空間の両端に位置する解 A, D、および多様性維持に重要な解 C（crowding distance を用いた場合、解 B の前後に位置する解 A, C 間の距離よりも、解 C の前後に位置する解 B, D 間の距離の方が大きくなるため、解 C の方が多様性維持に重要であると判断される）が選択される。しかし、これら選択された解はいずれも、選択されなかった解 B よりも精度が悪い。このように、非劣解同士の比較においても、ニッチング処理によって、精度と探索中の重要度との逆転が起こる。

更に、精度の向上と非劣解の数には密接な関わりがあるが、多数目的最適化では、探索の初期段階からアーカイブ母集団は非劣解で占められてしまう。EMO は、適合度が高い解周辺に次世代の解を生成することで解の精度を向上させているが、多数目的最適化では解同士の優劣の区別が付かなくなるため、精度が向上しなくなると報告されている^{5),14)}。

この問題に対して、選択圧を強くすることによりパレート最適フロントへの収束を促進し、精度を向上させる手法が提案されている。Average Ranking (AR)¹⁵⁾、Summed Ratio¹⁵⁾、The Favour Relation¹⁶⁾、K-Optimality¹⁷⁾ は、非劣解同士に異なる適合度を付与し、選択圧の強化を実現している。その中でも、AR が最も良好な探索性能を有すると David W. Corne らは報告している¹⁸⁾。AR は、各目的ごと順位付けを行い、全ての目的の順位を加算した値を適合度とするメカニズムである。例えば、3 目的の問題において、ある解が、 f_1 に関して 3 番目に良好、 f_2 に関して 2 番目に良好、 f_3 に関して 5 番目に良好な値であるとする。この場合、 $3+2+5=10$ がこの解の適合度となる。

しかし、AR のように非劣解同士に異なる適合度を付与して選択圧を強くしたとしても、探索解集合は 1 点に収束してしまい、多様性が失われてしまうことが確認されている⁵⁾。同様に、優越の定義を拡張することにより選択圧を強めるアプローチも提案されているが、このアプローチにおいても探索解集合の多様性は失われてしまう¹⁹⁾。パラメータチューニングにおいて、このような多様性のない解集合が導出された場合、DM はそれぞれの解が各実験値に対してどの程度の大きさの誤差を有しているのかを把握することができない。従って、数多くの基準を考慮するパラメータチューニングにおいても、多様性のある解集合が導出されることが望ましい。

3. 意思決定者の選好情報を利用したパラメータチューニング

本来ならば、パラメータチューニングにおいても、パレート最適フロント全域に分布する解集合を導出することが望ましい。しかし、多数目的最適化では、パレート最適フロント全域に解集合を分布させるために必要な解の数が莫大であるため、それは困難であると考えられる。仮に、パレート最適フロントの形が線形で、パレート最適解が各目的において $[0, 1]$ の範囲全域に値をとる問題があるとする。この問題のパレート最適フロント上に各目的に関して 0.1 間隔で均一に解を分布させるために必要な解の数を考える。2 目的の場合、この問題におけるパレート最適フロントの空間は 1 次元になるため、この空間全域に解集合を分布させるためには、およそ $1/0.1 = 10$ 個の解が必要であると考えられる。同様に、3 目的の場合は 2 次元のパレート最適フロントになるため、およそ $(1/0.1)(1/0.1) = 10^2$ 個の解、10 目的の場合は、およそ 10^9 の解が必要になると考えられる。この様に、パレート最適フロント全域に解集合を分布させるために必要な解の数は指数的に増加するため、多数目的最適化においてパレート最適フロント全域に多様性のある解集合を導出することは、計算コストを考慮すると極めて困難である。

そこで本研究では、多目的最適化の本来の目標であるパレート最適フロント全域に分布する解集合の導出の代わりに、限定された領域内で多様性を有する解集合の導出を多数目的最適化の目標とする。そして、精度が高く、限定された領域内で多様性を有する解集合を基にして、DM は局所的に、各目的間のトレードオフの度合いなどの対象問題や各解の特徴を把握できるようにとなると考えられる。この目標を達成するための

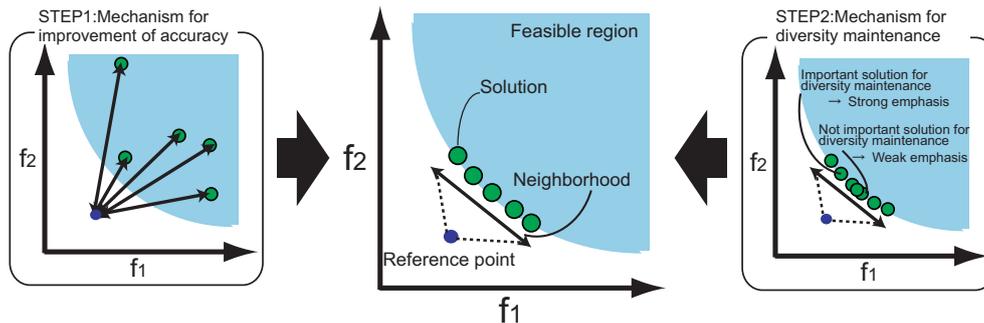


図 2 DM の選好情報を用いた多数目的最適化の探索戦略
 Fig. 2 Strategy for Evolutionary Many-Objective Optimization Using Decision Maker's Preferences

戦略として、以下の 2 段階のメカニズムが必要であると考えられる。

- STEP 1: パレート最適フロントへの収束
 解集合を限定した領域内へ収束させる。多数目的最適化では、2 章で述べたように、従来の優越のメカニズムだけでは解集合がパレート最適フロントに収束しない。そのため、優越以外のパレート最適フロントへの収束のメカニズムとして、各解がどの程度限定した領域に即しているかを判断し、それにより選択圧を加える。
- STEP 2: 多様性の維持
 限定した領域内で解集合の多様性が維持されるようにする。STEP 1 のメカニズムのみでは、2 章で述べたように解集合が 1 点に収束してしまい、多様性のある解集合を導出できない。そのため、限定した領域内で、多様性を維持するためにはどの解が重要であるのかを判断し、解の重要度を比較する際にその情報を利用する。

領域を限定するアプローチの一例として、DM の選好情報を用いる手法が提案されている^{20)~22)}。これらの手法では、DM の選好情報の基準として、希求点(目的関数空間上に DM が自由に設定する理想の点)を利用する。本戦略に希求点を適用した場合、希求点から最も近くにある 1 つの点に解集合が収束せず、その近傍にも解集合が分布すれば、目標を満たすことができると考えられる。DM の選好情報を用いた多数目的最適化の探索戦略を表す概念図を図 2 に示す。ただし、本戦略は多数目的最適化を対象としているが、視覚的に理解し易くするため、2 目的最小化問題の概念図で表している。

ここで、STEP 1 に相当する代表的なメカニズムとして、希求点からの距離や希求点との類似度を表現する achievement scalarizing function²³⁾ などの指標が挙げられる。また、STEP2 に相当する代表的なメカニズムとして、 ϵ -clearing²⁰⁾ がある。これは、解同士のユークリッド距離がパラメータ ϵ 以上に保たれるようにするメカニズムである。具体的には、ある解集合から無作為に解を選択し、選ばれた解から ϵ 以下の距離にある解を多様性維持のために不必要な解とみなして重要度を下げる。そして、無作為に選択した解や重要度を下げた解を除いた解集合から、再び無作為に解を選択し、同じ処理を繰り返していく。そのため、幅広さ有する解集合を導出したい場合には、 ϵ を大きな値に設定し、より限定された領域内で多様性のある解集合を導出したい場合には、 ϵ を小さな値に設定する。このようにして DM は、提示される解集合の幅広さを、パラメータ ϵ により制御することができる。

DM の選好情報を用いた代表的な EMO である Reference point based NSGA-II (R-NSGA-II)²⁰⁾ では、優越に基づくランキングを行った後、同一ランクの解集合に対し、希求点からのユークリッド距離(各目的を正規化した後のユークリッド距離)に基づく適合度を割り当てる。これが探索戦略の STEP 1 に相当するメカニズムである。その後、STEP 2 に相当するメカニズムとして ϵ -clearing が適用され、同一ランクの解集合の多様性を加味して適合度が更新される。希求点からのユークリッド距離に基づく適合度割り当てと ϵ -clearing の擬似コードをそれぞれ Algorithm 1, 2 に示す。擬似コードにおいて、 P は探索解集合を表す。また、R-NSGA-II では、複数の希求点の設定が可能のため、DM により設定された希求点の集合を R で表す。適合度は各解の fitness に格納される。解の重要度の比較は、まず、優越に基づいたランキングによ

Algorithm 1 : Flow of R-NSGA-II for improvement of accuracy

```
1 : calculate_domination_based_rank( $P$ )
2 : for all rank do
3 :    $F := \{x \in P | x.rank = rank\}$ 
4 :   for all pairs  $i \in F, j \in R$  do
5 :      $d_{i,j} := \text{normalized\_euclidean\_distance}(i, j)$ 
6 :   end for
7 :   for all pairs  $i \in F, j \in R$  do
8 :      $o_{i,j} := \text{ascending order of } d_{i,j} \text{ in } \{d_{x,j} | x = 1, \dots, |F|\}$ 
9 :   end for
10:   for all  $i \in F$  do
11:      $i.fitness := \min\{o_{i,y} | y = 1, \dots, |R|\}$ 
12:   end for
13: end for
```

Algorithm 2 : Flow of R-NSGA-II for diversity maintenance

```
1 : for all rank do
2 :    $F := \{x \in P | x.rank = rank\}$ 
3 :   while  $F \neq \phi$  do
4 :      $r := \text{random\_element}(F)$ 
5 :      $F := (F - \{r\})$ 
6 :     for all  $i \in F$  do
7 :       if  $\text{normalized\_euclidean\_distance}(i, r) \leq \varepsilon$  do
8 :          $i.fitness := \text{worst\_fitness}$ 
9 :          $F := (F - \{i\})$ 
10:      end if
11:    end for
12:  end while
13: end for
```

り導出された各解の *rank* を基準に行われる (ただし, 多数目的最適化では, ほとんどの解に同一の *rank* が付与されている). 次に, 比較対象の解が同一の *rank* を有する場合, 重要度の比較は Algorithm 1, 2 により導出された *fitness* を基準に行われる.

Algorithm 1 では, まず 4~6 行目の操作により, 解 F_i と希求点 R_j の全ての組み合わせについて, ユークリッド距離 $d_{i,j}$ を計算する. 次に, 7~9 行目の操作により, 同一 *rank* を有する解集合 F において, 全

ての解の希求点 R_j からのユークリッド距離を昇順にソートした際, 解 F_i が何番目に位置するのかを $o_{i,j}$ に格納する. そして, 10~12 行目の操作により, 解 F_i における全ての希求点に関する順位 $o_{i,0} \sim o_{i,|R|}$ の中から, 最小の値を解 F_i の *fitness* としている.

Algorithm 2 では, まず 4~5 行目の操作により, 同一 *rank* を有する解集合 F の中からランダムに選択した 1 つの解を r とし, 解集合 F から解 r を取り除く. 次に, 6~11 行目の操作により, 解集合 F の中

から、解 r とのユークリッド距離がパラメータ ε 以内にある解の *fitness* を最も悪い値に設定し、解集合 F から取り除く。そして、上記の 4~11 行目の操作を、解集合 F が空集合になるまで繰り返す。

R-NSGA-II を用いれば、多目的最適化においても、精度が高く、また、希求点付近に多様性のある解集合を得ることができると報告されている²⁰⁾。そのため、DM の選好情報を利用した EMO をパラメータチューニングに適用すれば、数多くの実験値との誤差を目的と捉えながらも、得られた解集合を基に、DM は対象モデルの特徴や各パラメータセットの特徴を把握することができると思われる。本章では、DM の選好情報を用いる EMO によるパラメータチューニングの有効性を検証する。

4. 意思決定者の選好情報を利用するパラメータチューニングの有効性

本章では、テストモデルを用いた数値実験により、意思決定者の選好情報を利用するパラメータチューニングの性能を、他のパラメータチューニング手法の性能と比較する。

4.1 パラメータチューニング手法

本実験では、以下の 4 つアプローチによるパラメータチューニング手法を比較した。

・ 1 つの指標の導入

1 つの指標として、以下の数式で示される Root Mean Square (RMS) エラーを用いた。

$$RMS\ error = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=0}^m \omega_i (f(x_i) - F_i)^2} \quad (2)$$

上記の数式において、 m は観測点の数、 x_i は観測点の値、 F_i は x_i における実験値、 f_i は x_i におけるシミュレーション値、 ω_i は各誤差に対する重みである。本実験では、代表的な単目的最適化手法である Distributed Genetic Algorithm (DGA)²⁴⁾ を用いて、RMS エラーが最小になる解を導出した。ここで、 ω_i は全て 1 とした。

・ 一般的な EMO の適用

代表的な EMO である NSGA-II をパラメータチューニングに適用した。その際、調整すべきパラメータをそれぞれ設計変数とみなし、各実験値との誤差を目的関数値として扱った。そのため、実験値の数が m ならば、パラメータチューニン

グは m 目的最適化問題として扱われる。

・ 選択圧を高める EMO の適用

選択圧を高めるメカニズムの中でも AR が最も性能が高いと報告されているため、AR を用いた NSGA-II によるパラメータチューニングを数値実験に用いた。設計変数と目的関数値は、一般的な EMO を適用する場合と同様に扱った。

・ DM の選好情報を利用した EMO の適用

提案手法である DM の選好情報を利用した EMO によるパラメータチューニングの代表例として、R-NSGA-II をパラメータチューニングに適用し、数値実験に用いた。希求点は実行可能領域外にも設定することができるので、各実験値に対する重要度に偏りがないと仮定して、全ての誤差が 0 となる点を希求点として設定した。もし重要度に偏りがある場合、大きな誤差を許容可能な観測点においては大きな値を、誤差を小さくしたい観測点においては小さな値を取るよう希求点を設定する。本手法により、多様性を有する解集合が導出されれば、DM は探索後に提示された様々な解集合から選好に最も適した解を選択すればよいので、探索前に希求点の設定について厳密に検討する必要がなくなる。また、 ε を 0.1 とし、設計変数と目的関数値は、一般的な EMO を適用する場合と同様に扱った。

ここで、NSGA-II および DGA のパラメータを表 1 の通りに設定した。また、AR を用いた NSGA-II、R-NSGA-II では、NSGA-II の場合と同じパラメータを用いた。

表 1 NSGA-II および DGA に用いたパラメータ
Table 1 Parameters of NSGA-II and DGA

アルゴリズム	NSGA-II	DGA
探索母集団サイズ	100	100
アーカイブサイズ	100	—
エリートサイズ	—	1 × 鳥数
終了世代	500	500
交叉率	1.0	1.0
交叉方法	2 点交叉	2 点交叉
遺伝子長	20 × 設計変数長	20 × 設計変数長
コード化方法	交番二進符号	交番二進符号
突然変異率	1.0/遺伝子長	1.0/遺伝子長
トーナメントサイズ	2	4
鳥数	—	10
移住率	—	0.5
移住間隔	—	5

表 2 参照点

Table 2 Assumed observation values

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$f(x)$	-3.0	1.0	2.0	0.0	1.0	-1.0	0.0	3.0	1.0	2.0

4.2 テスト問題

以下の数式で表される 2 つのテストモデルを作成し、数値実験に利用した。

テストモデル A

$$f(x) = \sum_{i=0}^7 (a_i x^i) \quad (3)$$

where $0 \leq x < 1, -20 \leq a_i < 20$

テストモデル B

$$f(x) = a_0(1+x^{a_1}) \log |a_2 \sin x + a_3 \cos x| - a_4(1+x^{a_5}) \log |a_6 \sin x + a_7 \cos x| \quad (4)$$

where $0 \leq x < 1, 0 \leq a_i < 20$

上記の数式において、 $f(x)$ の振る舞いが実世界における何らかの現象やシステムを模倣していると仮定する。 a_i は初期設定を行うパラメータであり、 $f(x)$ の振る舞いに大きな影響を及ぼすため、適切に調整される必要がある。テストモデル A はパラメータ同士に依存関係がないモデルで、テストモデル B はパラメータ同士に依存関係があるモデルである。ここで、シミュレーション値が一致すべき参照点が表 2 の通りであると仮定する。

各観測点においてモデルのシミュレーション値 $f(x)$ が実験値に近づくように、パラメータ a_i を調整しなければならない。例えば、 $x = 0.3$ の時の実験値は 0.0 であるため、モデルのシミュレーション値 $f(0.3)$ は 0.0 に近づくようにパラメータは設定されるべきである。しかし、各実験値との誤差間にはトレードオフの関係が存在するため、全ての観測点において実験値との誤差がないシミュレーション値を示すパラメータセットを得ることは不可能である。

4.3 検討事項

・ 精度

実験値との誤差が小さくなればなる程、得られたパラメータの精度は高いと言える。従って、導出された解集合を用いた際に生じる実験値との誤差について比較を行った。NSGA-II, AR を用いた NSGA-II, R-NSGA-II の場合、探索終了時のアーカイブに存在する非劣解集合における誤差の平均

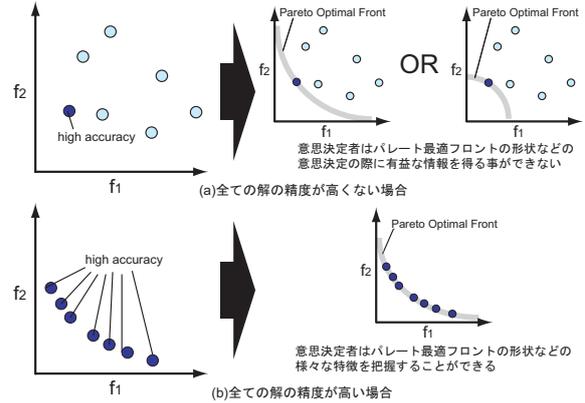


図 3 精度を確認するために誤差の平均を用いる理由

Fig. 3 Reason for use of average errors to confirm accuracy

値を観測点ごとに確認した。最良の解ではなく、非劣解集合における平均値を用いたのは、図 3(a) のように、1 つの精度が高い解が非劣解集合に含まれていたとしても、各パラメータセットや対象モデルの特徴を把握することができないからである。もし、図 3(b) のように、非劣解集合の全ての解の精度が高ければ、精度の高い解同士を比較することにより、DM はトレードオフの度合い等の様々な特徴を把握することができる。本研究におけるパラメータチューニングの目的は、最良のパラメータセットを得ることだけでなく、DM に対して意思決定の際に有益な情報となる様々な特徴を提示することである。従って、非劣解集合の全ての解の精度が高くなる必要があるため、パレートのアプローチにおける精度を確認するための指標として、誤差の平均値を用いた。また、DGA の場合、探索中で最も RMS エラーが低い解の誤差を確認した。

・ 多様性

得られた解集合は、精度が同程度の場合、対象モデルや各パラメータセットの特徴を把握できるように、多様性を有していることが望ましい。従って、導出された解集合を用いた際のモデルのシミュレーション値の分布を確認した。NSGA-II, AR を用いた NSGA-II, R-NSGA-II の場合、探索終了時のアーカイブに存在する非劣解集合によるモデルのシミュレーション値の分布を確認した。また、DGA の場合、探索中で最も RMS エラーが低い解のシミュレーション値を確認した。

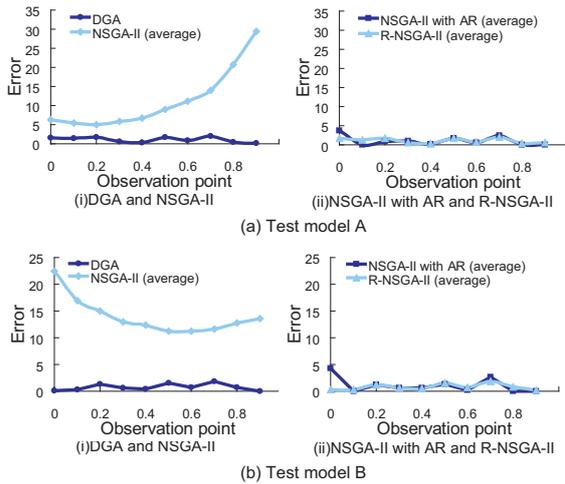


図 4 各テストモデルにおける実験値との誤差
Fig. 4 The errors to the observation values of each model

4.4 実験結果

・ 精度

図 4 は、各テストモデルにおいて、提案手法である R-NSGA-II により導出された解集合および、DGA, NSGA-II, AR を用いた NSGA-II により導出された解や解集合の誤差を示す。

それぞれのグラフにおいて、横軸は実験値 (x)、縦軸は実験値との誤差を表す。両モデル共に、AR を用いた NSGA-II および R-NSGA-II により得られた解集合の精度は、DGA により得られた解の精度と同程度であることを確認できる。また、NSGA-II により得られた解集合は、他の手法による解よりも誤差が大きく、精度が悪いことを確認できる。

・ 多様性

図 5 は、各テストモデルにおいて、R-NSGA-II により導出された解集合および、DGA, NSGA-II, AR を用いた NSGA-II により導出された解や解集合のシミュレーション値の分布を示す。

それぞれのグラフにおいて、横軸は実験値、縦軸はモデルのシミュレーション値を表す。また、同じ解によるシミュレーション値であることを表すため、各観測点におけるシミュレーション値を線分で結んでいる。更に、シミュレーション値の分布と同時に各観測点における実験値も示している。実験結果より、NSGA-II によるシミュレーション値は幅広く分布しているが、実験値から大

きく離れていることを確認できる。また、AR を用いた NSGA-II によるシミュレーション値は、1 点に集中していることが分かる。それに対し、R-NSGA-II によるシミュレーション値は、観測点付近に多様性を有しながら分布している。

上記の数値実験から、一般的な EMO を適用したパラメータチューニングでは、誤差が小さいパラメータセットを得ることができず、1 つの指標を導入するパラメータチューニングや選択圧を高める EMO を適用したパラメータチューニングでは、多様性のある解集合を得られないことが分かった。それに対し、DM の選好情報を利用した EMO によるパラメータチューニングでは、精度が高く、観測点付近に多様性のある解集合を導出できることを確認した。また、表 1 に示すパラメータを変更して実験を行った場合にも、同様の実験結果が得られた。厳密なパラメータの変化が及ぼす影響の検討は今後の課題とする。

5. 実問題への適用

本章では、テストモデルにおいて有効性を示した意思決定者の選好情報を利用するパラメータチューニングの実問題への適用例として、ディーゼルエンジンの燃焼モデルの 1 つである HIDECS のパラメータチューニングを行った。本手法の性能を確認するため、前章で用いた DGA (1 つの指標を導入する例)、NSGA-II (一般的な EMO を適用する例)、AR を用いた NSGA-II (選択圧を高める EMO を適用する例) によるチューニング結果と、精度および多様性の観点から比較した。また、パレートのアプローチにより導出された解集合の精度は、テストモデルを用いた実験同様、意思決定の際に有益な情報を把握可能な解集合を導出することが探索の目標となるため、最良解の誤差ではなく、非劣解集合の誤差の平均値を用いて確認した。

5.1 HIDECS

近年、世界規模で CO₂ の削減が大きな注目を集めており、その中でディーゼルエンジンが見直されている。ディーゼルエンジンは燃費に優れており、単位出力に対して、CO₂ の排出が少ないからである。また、これまでディーゼルエンジンはすすなどの有害物質を排出する問題が指摘されていたが、技術的な対処も行われ、これまで利用されていたものよりも更に効率的な小型のディーゼルエンジンが広く利用されるようになって

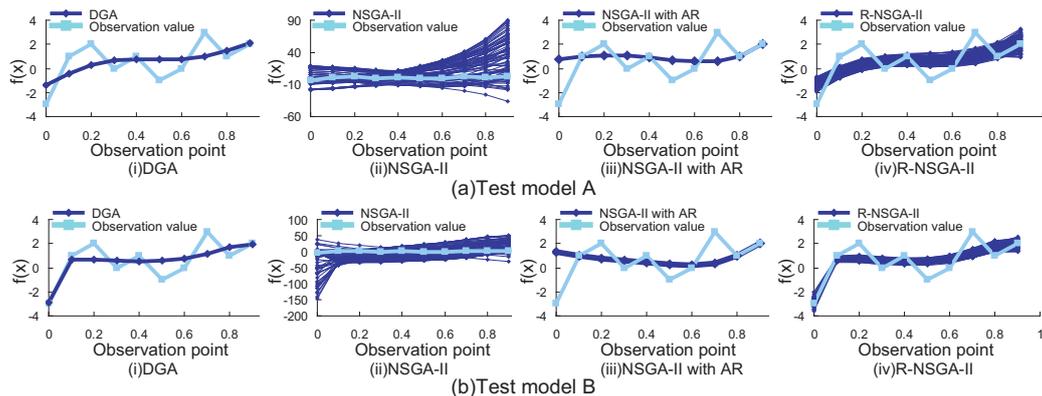


図5 各テストモデルにおけるシミュレーション値の分布
Fig. 5 The distribution of output values of each model

きた．このような背景に対して，小型のディーゼルエンジンのシミュレーションに関する研究例はほとんどみられない．一方で，これまで行われてきた中・大型ディーゼルエンジンのモデルを，内在するパラメータを調整することにより，小型のディーゼルエンジンのシミュレーションに利用できれば非常に大きな効果が期待できる．

そこで，ディーゼルエンジンの燃焼をシミュレートする現象論的モデルの1つである HIDECS を利用し，小型のディーゼルエンジンにおける実験値に近づくように，パラメータをチューニングする数値実験を行った．本実験では，各クランク角度におけるシリンダ圧力を実験値，5つの空気導入係数を調整すべきパラメータとした．ボア径やクランク長などの物理的な値は測定から求まるパラメータである．一方，空気導入係数は，ディーゼル燃料と空気がシリンダ内での混合する率を表す係数で，これまで試行錯誤的もしくは経験的に決定されてきたパラメータであり，HIDECS を利用する際には大きく結果に影響するパラメータである．まず，対象となる実機のエンジンにおいて，各クランク角度でのシリンダ圧力を計測した．そして，各パラメータチューニング手法を用い，実機において観測された各クランク角度におけるシリンダ圧力にシミュレーション値が一致するように，空気導入係数を調整した．空気導入係数はそれぞれ，0.0～3.0の範囲内において，0.1間隔で制御可能である．クランク角度を-7.0から50.0まで1.0ずつ増加させた時のシリンダ圧力を計測したため，観測点の数は58となる．また，各パラメータチューニング手法を適用する際，遣伝子長を(5×設計変数長)とし，その他のパラメータを前章の実験と同様に設定した．

5.2 実験結果

・精度

図6は，HIDECSにおいて，R-NSGA-IIにより導出された解集合および，DGA，NSGA-II，ARを用いたNSGA-IIにより導出された解や解集合の実験値（実機において観測されたシリンダ圧力）との誤差を示す．

それぞれのグラフにおいて，横軸はクランク角度（観測点），縦軸は観測したシリンダ圧力との誤差を表す．テストモデルを用いた数値実験の結果と同様，R-NSGA-IIによる解集合の精度はDGAと同程度であり，NSGA-IIによる解集合は他の手法の解より精度が悪いことを確認できる．一方，テストモデルを用いた実験結果とは異なり，ARを用いたNSGA-IIによる解集合はDGAやR-NSGA-IIの解よりも精度が悪い．これは，58目的の問題に対し，ARの選択圧が低下したためだと考えられる．例えば，2目的最小化問題にARを適用した場合， f_1 ， f_2 のそれぞれについての順位が1,9の解にも9,1の解にも同じ適合度10が付与される．つまり，ARを用いた探索では， f_1 が低い領域にある解も f_2 が低い領域にある解も重要視される．ここで，もし目的数が増えれば，同じ適合度になる各目的の組み合わせが増加するため，ARによって重要視される領域も増加する．従って，HIDECSのパラメータチューニングのような58目的の問題では，ARによって重要視される領域が広くなり過ぎたため，選択圧が低下したと考えられる．

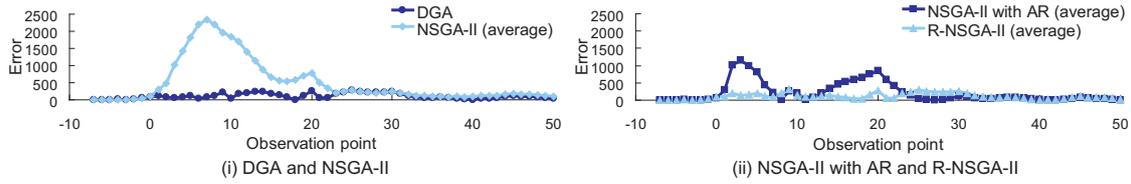


図 6 HIDECS における各実験値との誤差

Fig. 6 The errors to the observation values of HIDECS

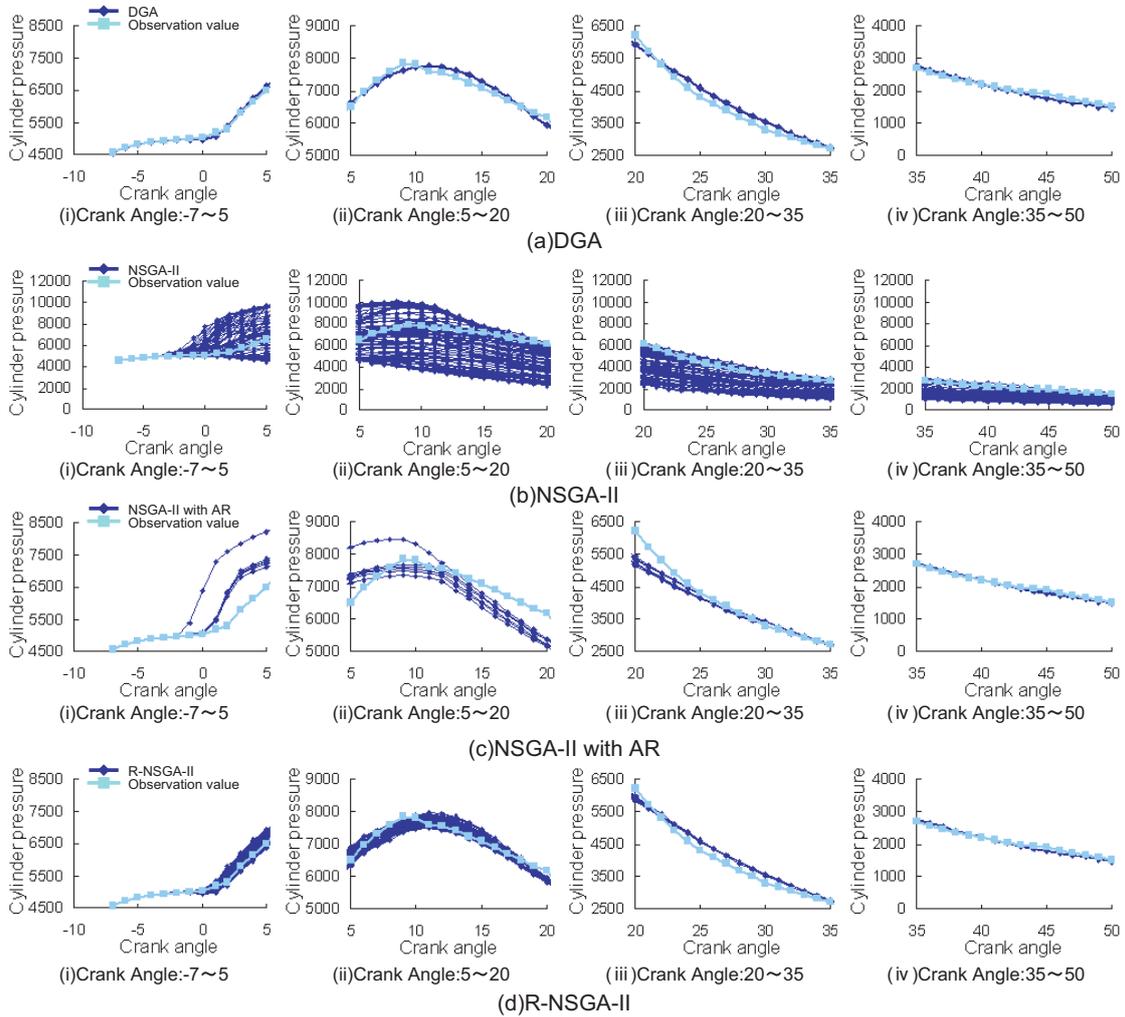


図 7 HIDECS におけるシミュレーション値の分布

Fig. 7 The distribution of output values of HIDECS

・ 多様性

図 7 は、HIDECS において、R-NSGA-II により導出された解集合および、DGA、NSGA-II、AR を用いた NSGA-II により導出された解や解集合のシミュレーション値（シリンダ圧力）の分布を示す。シリンダ圧力はクランク角度によって大きく変化するため、1 つのグラフに全てのクランク

角度におけるシミュレーション値を表すと、各クランク角度における多様性の確認が難しくなる。そのため、クランク角度の範囲が-7.0~5.0、5.0~20.0、20.0~35.0、35.0~50.0 のそれぞれの場合に対応した 4 つのグラフに分割して、実験結果を表している。

それぞれのグラフにおいて、横軸はクランク

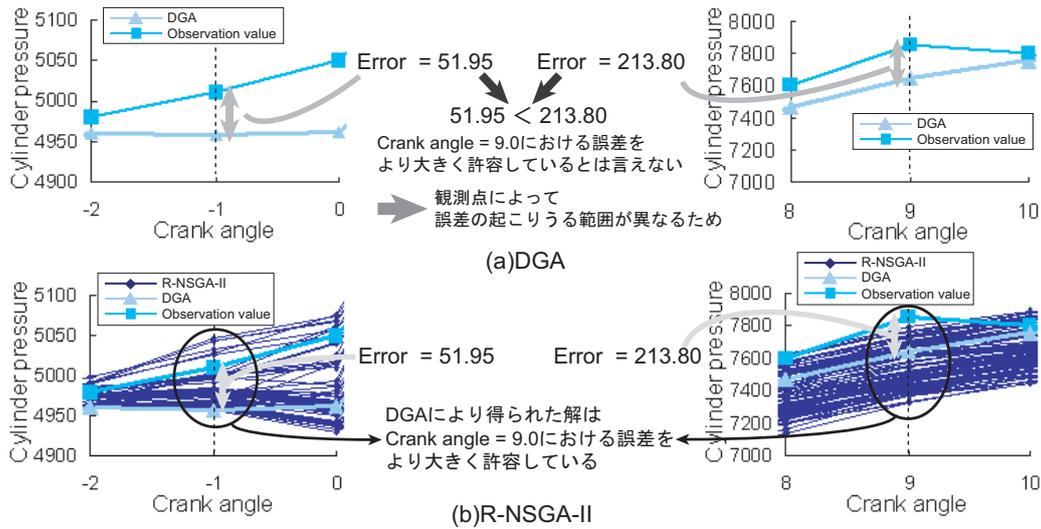


図 8 各手法による結果を基に把握できる各パラメータセットの特徴

Fig. 8 Characteristics of each set of parameters which can be confirmed from the results of each method

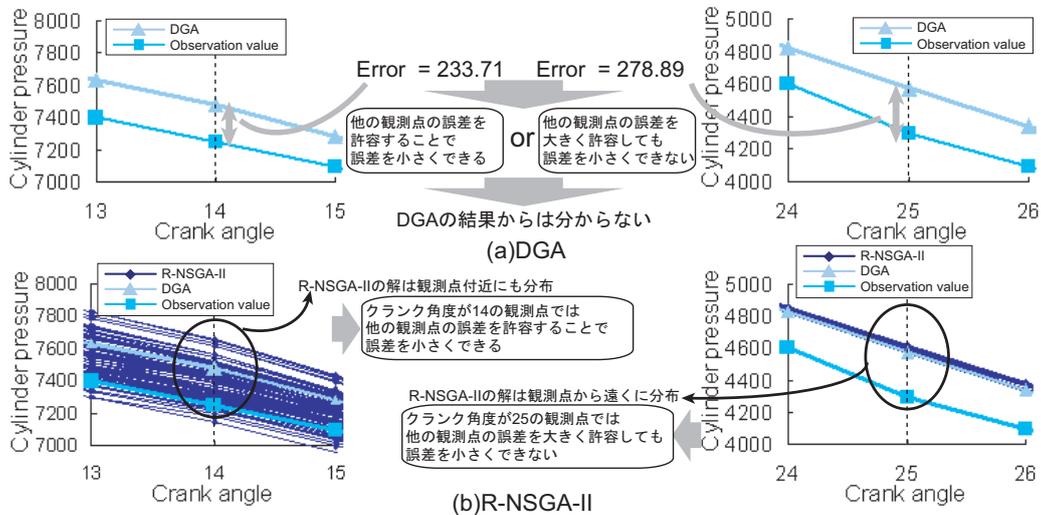


図 9 各手法による結果を基に把握できる対象モデルの特徴

Fig. 9 Characteristics of the model which can be confirmed from the results of each method

角度、縦軸は HIDECS において出力されたシリンダ圧を表す。また、同じ解によるシミュレーション値であることを表すため、各観測点におけるシミュレーション値を線分で結んでいる。更に、シミュレーション値の分布と同時に、実機において観測された各クランク角度におけるシリンダ圧も示している。実験結果より、NSGA-II および AR を用いた NSGA-II によるシミュレーション値は幅広く分布しているが、実験値から大きく離れていることを確認できる。AR を用いた NSGA-II によるシミュレーション値が、テストモデルの実

験のように 1 点に集中していないのは、上記に説明した精度低下の原因と同じであると考えられる。それに対し、R-NSGA-II によるシミュレーション値は、希求点付近に多様性を有しながら分布していることを確認できる。

以上の HIDECS を用いた実験から、DM の選好情報を用いたパラメータチューニングは、実問題においても精度が高く、多様性のある解集合を導出できることを確認できた。表 1 に示すパラメータを変更して実験を行った場合にも、同様の実験結果が得られた。厳

密なパラメータの変化が及ぼす影響の検討は今後の課題とする。

また、1つの指標を用いて、様々な組み合わせの重み付けによる探索を繰り返し行う方法を用いても、多様性を有する解集合を導出することが可能であると考えられる。しかし、一度の探索で精度の高い解を得るには多くの評価計算回数を要し、この方法では何度も探索を繰り返す必要がある。従って、一度の探索で複数の解集合を導出可能なパレートのアプローチと比較して、多くの計算コストが必要になるため、実用性は低くなる。

この HIDECS のパラメータを決定する課題において、1つの指標を導入する方法のように、多様性のないパラメータセットや1つのパラメータセットが導出された場合、DM は最終的に利用するパラメータセットに関する情報を得ることが難しくなる。例えば、DGA により得られたパラメータを用いた HIDECS では、図 8 (a) に示すように、クランク角度が-1.0 の時の誤差が 51.95 であり、9.0 の時の誤差が 213.80 である。しかし、単純に 51.95 と 213.80 を比較して 213.80 の方が大きいからと言って、クランク角度が-1.0 の時の誤差を大きく許容せず、9.0 の時の誤差を大きく許容していると、DM は断定することはできない。それは、誤差の起こりうる範囲が各クランク角度により大きく異なるからである。それに対し、R-NSGA-II により得られた解集合のシミュレーション値を確認すれば、各パラメータセットがそれぞれのクランク角度においてどの程度の誤差を有しているのかを把握することができる。図 8 (b) に示すように、クランク角度が-1.0 の時は大部分の R-NSGA-II の解の誤差は 51.95 以内であり、9.0 の時は多数の解が 213.80 より大きい誤差を有している。この R-NSGA-II により得られた情報を基に、DGA のパラメータセットは、クランク角度が-1.0 の時に誤差を大きく許容し、9.0 の時に誤差を大きく許容していないことが分かる。

また、R-NSGA-II を用いたパラメータチューニングでは、対象モデルの特徴も把握できると考えられる。DGA により得られたパラメータを用いた HIDECS では、図 9 (a) に示すように、クランク角度が 14.0 の時の誤差が 233.71 であり、25.0 の時の誤差が 278.89 である。しかし、この情報だけでは、他の観測点における誤差を許容すればこれらの観測点における誤差を小さくできるのか、他の観測点における誤差を許容したとしてもこれらの観測点における誤差を小さくすることは困難なのか、DM は判断することができない。それに対し、図 9 (b) のように、R-NSGA-II により

得られたパラメータのシミュレーション値の分布を確認すれば、クランク角度が 14.0 の時は実験値の近くにも解集合は分布し、25.0 の時は全ての解集合が実験値から離れて分布していることを確認できる。この情報を基に DM は、クランク角度が 14.0 の時は、他の観測点での誤差を許容すれば誤差を小さくすることが可能で、25.0 の時は、小さな誤差のシミュレーション値を得ることが難しいことを把握できる。

このように、DM の選好を用いた EMO によるパラメータチューニングにより、精度が高く、多様性のある解集合を導出すれば、DM は各パラメータセットの特徴や対象モデルの特徴を把握できることが分かった。

6. ま と め

本稿では、実世界における実験値が多数存在する場合において、実験値とシミュレーション値との誤差の最小化をそれぞれ目的と捉えるパラメータチューニング手法を提案した。多数目的最適化に NSGA-II や SPEA2 といった一般的な EMO を適用した場合、探索の初期段階からアーカイブ内の全ての解が非劣解になってしまうため、探索性能は著しく悪化する。更に、非劣解に異なる適合度を割り当てたり、優越の定義を拡張することにより選択圧を高める多目的最適化手法が提案されているが、これらの手法を用いると解集合の多様性が失われてしまう。一方で、本来は多数目的最適化においてもパレートフロント全域に分布する解集合を得ることが望ましいが、これは計算コストを考慮すると非常に困難である。そのため、パレート最適フロント全域に分布する解集合の導出の代わりに、限定された領域内で多様性を有するパレート最適解集合を導出することが可能な多目的最適化手法に着目し、その手法を利用してパラメータチューニングを行うことを提案した。テストモデルや HIDECS を用いた数値実験を通して、本手法により、精度が高く、観測点付近に多様性のある解集合を導出できることが分かった。更に、それらの解集合を基に、DM は各パラメータセットの特徴や対象モデルの特徴を把握できることを確認できた。また、現状では、小型のディーゼルエンジンの振る舞いを確認する際に HIDECS を利用する例は少ないが、今後の課題として、小型のディーゼルエンジンのシミュレーションにおいて、本手法によりチューニングされた HIDECS を利用することの有効性を検討する予定である。

参 考 文 献

- 1) Andrew R. Price, I. I. Voutchkov, Graeme E. Pound, N. R. Edwards, Timothy M. Lenton and Simon J. Cox. Multiobjective Tuning of Grid-Enabled Earth System Models Using a Non-dominated Sorting Genetic Algorithm (NSGAI). Proceedings of the Second IEEE International Conference on e-Science and Grid Computing. Amsterdam, Netherlands, IEEE, 117-117, 2006.
- 2) Yasue Mitsukura, Toru Yamamoto, and Masahiro Kaneda. Genetic Tuning Scheme of PID Parameters for First-Order Systems with Large Dead Times. IEICE TRANSACTIONS on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences Vol.E83-A No.4 pp.740-746, 2000.
- 3) J.C. Hargreaves, J.D. Annan, N.R. Edwards and R. Marsh. An efficient climate forecasting method using an intermediate complexity earth system model and the ensemble Kalman filter. *Climate Dynamics* 23(7-8) pp. 745-760, 2004
- 4) J.M. Herrero, X. Blasco, M. Marti'nez, J. Sanchis. Multiobjective Tuning of Robust PID Controllers Using Evolutionary Algorithms. *Lecture Notes in Computer Science*, 4974, pp. 515 - 524, 2008.
- 5) Tomoyuki Hiroyasu, Hiroyuki Ishida, Mitsunori Miki, and Hisatake Yokouchi. Difficulties of Evolutionary Many-Objective Optimization. <http://mikilab.doshisha.ac.jp/dia/research/report/2008/1006/004/report20081006004.html>, 2008.
- 6) Hiroyuki Hiroyasu, Toshikazu Kadota, and Masataka Arai. Development and Use of a Spray Combustion Modeling to Predict Diesel Engine Efficiency and Pollutant Emissions (Part 1 Combustion Modeling). *Bulletin of the JSME*, Vol. 26, No. 214, pp. 569.575, April 1983.
- 7) Hiroyuki Hiroyasu, Toshikazu Kadota, and Masataka Arai. Development and Use of a Spray Combustion Modeling to Predict Diesel Engine Efficiency and Pollutant Emissions (Part 2 Computational Procedure and Parametric Study). *Bulletin of the JSME*, Vol. 26, No. 214, pp. 576.583, April 1983.
- 8) 坂和正敏. 離散システムの最適化. 森北出版, 2000.
- 9) D. E. Goldberg. *Genetic Algorithms in search, optimization and machine learning*. Addison-Wesley, 1989.
- 10) K. Deb, S. Agrawal, A. Pratab and T. Meyarivan. A Fast Elitist Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm for Multi-Objective Optimization: NSGAI, In KanGAL report 200001, Indian Institute of Technology, Kanpur, India, 2000.
- 11) E. Zitzler, M. Laumanns and L. Thiele. SPEA2: Improving the Performance of the Strength Pareto Evolutionary Algorithm. In *Technical Report 103*, Computer Engineering and Communication Networks Lab (TIK), Swiss Federal Institute of Technology (ETH) Zurich, 2001.
- 12) H. Ishibuchi, N. Tsukamoto, and Y. Nojima. Evolutionary many-objective optimization: A short review. *Proc. of 2008 IEEE Congress on Evolutionary Computation*, pp. 2424-2431, Hong Kong, June 1-6, 2008.
- 13) H. Ishibuchi, N. Tsukamoto, Y. Hitotsuyanagi, and Y. Nojima. Effectiveness of scalability improvement attempts on the performance of NSGA-II for many-objective problems. *Proc. of 2008 Genetic and Evolutionary Computation Conference*, pp. 649-656, Atlanta, July 12-16, 2008.
- 14) V. Khara, X. Yao, and K. Deb. Performance scaling of multi-objective evolutionary algorithms. *Lecture Notes in Computer Science 2632: Evolutionary Multi-Criterion Optimization - EMO 2003*, pp. 376-390, Springer, Berlin, 2003.
- 15) Bentley, P.J. and Wakefield, J.P. Finding acceptable solutions in the Pareto-optimal range using multiobjective genetic algorithms. Chawdhry, P.K., Roy, R., & Pant, R.K. (eds) *Soft Computing in Engineering Design and Manufacturing*. Springer Verlag London Limited, Part 5, 231-240, 1997.
- 16) Drechsler, N., Drechsler, R., Becker, B. Multi-objective optimisation based on relation favour. In *Proc. 1st EMO*, pp. 154.166, Springer Verlag, 2001.
- 17) di Pierro, F. Many-objective evolutionary algorithms and applications to water resources engineering. PhD thesis, University of Exeter, UK, August 2006.
- 18) David W, Corne and Joshua D, Knowles. Techniques for Highly Multiobjective Optimisation: Some Nondominated Points are Better than Others. *Proceedings of the 9th annual conference on Genetic and evolutionary computation*, 773-780, 2007.
- 19) H. Sato, H. E. Aguirre, and K. Tanaka. Controlling dominance area of solutions and its impact on the performance of MOEAs. *Lecture Notes in Computer Science 4403: Evolutionary*

- Multi-Criterion Optimization - EMO 2007, pp. 5-20, Springer, Berlin, March 2007.
- 20) K. Deb and J. Sundar. Reference point based multi-objective optimization using evolutionary algorithms. In Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference(GECCO-2006), 635-642, 2007.
 - 21) K. Deb and A. Kumar. Interactive evolutionary multi-objective optimization and decision-making using reference direction method. In Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO-2007), pages 781-788. New York: The Association of Computing Machinery (ACM), 2007.
 - 22) L. Thiele, K. Miettinen, P. Korhonen, J. Molina, A preference-based interactive evolutionary algorithm for multiobjective optimization, Technical Report Working Paper Number W-412, Helsingin School of Economics, Helsingin Kauppakorkeakoulu, Finland, 2007.
 - 23) A.P. Wierzbicki. Basic properties of scalarizing functionals for multiobjective optimization. Math Operationsforsch Statist Ser Optimization 8 pp. 55-60, 1977.
 - 24) Reiko Tanese. Distributed Genetic Algorithms, Proceedings of the Third International Conference on Genetic Algorithms, pp434-439, 1989.
-